

수학 필답고사 (자연계열) 문제지

이화여자대학교 (

) 전공(학과) 수험번호(

) 성명()

※ 답안지에 선택과목과 수험번호, 문제지 유형을 표시하고, 답은 해당 문항별로 답란에 검은색 펜으로 표시하시오.

1. 연립 부등식 $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ |x-a| \leq 1 \end{cases}$ 이 해를 가지지 않기 위한 모든 정수 a 의 개수를 구하시오.

① 0 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

2. T 가 2×3 행렬이고 $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 를 만족할 때, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 의 값을 구하시오.

① $\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 1 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. 1부터 800까지의 자연수들 중에서 4, 5, 6 가운데 하나에 의해 나누어지는 모든 자연수들의 총 개수를 구하시오.

① 291 ② 311 ③ 351 ④ 361 ⑤ 374

4. 직사각형의 대각선의 길이가 $3\sqrt{2}$ 일 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하시오.

① $12\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{2}$ ③ 12 ④ 10 ⑤ 6

5. A부터 J까지 10개의 알파벳 문자들이 있다. A와 H사이 또는 H와 A사이에 G가 들어가도록 10개의 문자들을 일렬로 배열하는 모든 가능한 방법의 수를 구하시오.

① $\frac{10!}{3!} \times 2$ ② $8! \times 2$ ③ $7! \times 3!$ ④ $8!$ ⑤ $\frac{10!}{7!} \times 2$

6. 다음 명제 중 옳은 것을 모두 고르시오.

a. 세 정수 a, b, c 에 대하여 a 가 bc 의 약수이면, a 는 b 또는 c 의 약수이다.

b. $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ 라고 정의하자. 이 함수는 $f: R \rightarrow [0,1)$ 인 전사 함수이다. (이때, $\lfloor x \rfloor$ 는 x 보다 작거나 같은 정수들 중 가장 큰 정수 값을 의미한다.)

c. 자연수 a, b, c 가 있다. a, b 가 서로 소가 아니고, b, c 도 서로 소가 아니면 a, c 도 서로 소가 아니다.

① \neg, \neg ② \neg, \neg ③ \neg ④ \neg, \neg ⑤ \neg, \neg, \neg

7. 집합 A 의 원소 개수는 네 개이고, B 의 원소 개수는 세 개일 때, A 에서 B 로 가는 모든 가능한 전사함수(onto function)의 총 개수를 구하시오.

- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 36 ⑤ 48

8. 자연수 1부터 10까지의 원소로 구성된 집합 S 가 있다. S 의 모든 부분 집합들 A_i 에 대하여 부분 집합들의 원소의 개수를 합한 수, 즉 $\sum_i |A_i|$ 를 구하시오. (단, $|A_i|$ 는 A_i 의 원소의 개수를 나타낸다.)

- ① 5210 ② 5120 ③ 3072 ④ 3010 ⑤ 1024

9. 헬륨을 불어 넣어서 공의 부피를 증가시키고 있다. 시간이 t_0 분 경과한 후에 공의 부피는 분당 $24\pi \text{ cm}^3/\text{min}$ 의 비율로 증가하고 반지름은 $2\pi \text{ cm}/\text{min}$ 의 비율로 증가하고 있다. 이때, 즉 t_0 분이 경과한 후의 공의 부피를 구하시오.

- ① $4\sqrt{3}\pi$ ② $3\sqrt{2}\pi$ ③ $2\sqrt{3}\pi$ ④ 4π ⑤ 3π

10. 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$ 의 값을 구하시오.

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

11. 어떤 함수 f 에 대하여 $f(x) + \frac{2}{1+x}f(x)^2 = 6$ 이며 $f(1) = 2$ 라고 가정할 때, $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

- ① $-\frac{3}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

12. $f(x) = \ln(1 + \tan^{-1}x)$ 일 때 $(f^{-1})'(0)$ 의 값을 구하시오 (단 $x \geq 0$).

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13. 다음의 적분 중 수렴하는 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $\int_1^\infty (\ln(2x) - \ln(1+x))dx$

ㄴ. $\int_1^\infty \frac{1+x}{\sqrt{1+\cos^2 x + x^5}} dx$

ㄷ. $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{x\sqrt{\sin x}} dx$

① ㄱ, ㄴ

② ㄱ, ㄷ

③ ㄴ

④ ㄷ

⑤ ㄴ, ㄷ

14. 다음 명제 중 옳은 것을 모두 고르시오.

ㄱ. 벡터 \vec{a}, \vec{b} 는 3차원 공간에 존재하는 단위벡터 (unit vector)들이라고 가정하자. 이때, $\vec{a} \times \vec{b}$ 도 단위 벡터이다.

ㄴ. 3차원 공간에 존재하는 세개의 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 에 대하여 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 1$ 라고 가정하자, 이때 $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -1$ 이다.

ㄷ. 함수 f 가 (a, b) 에서 미분가능하며 극소(local minimum)를 가질 때, (a, b) 에서 함수 f 의 모든 방향도함수(directional derivative)값은 0이다.

ㄹ. A 가 $m \times n$ 행렬이고 \vec{x} 가 n 차원 벡터이고 \vec{b} 가 m 차원 벡터이다. 주어진 A 와 b 에 대하여 $\vec{A}\vec{x} = \vec{b}$ 가 무한히 많은 해를 가진다고 가정할 때, A 는 정방행렬이 될 수 없다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ ④ ㄱ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

15. 다음의 급수 중 수렴하는 것을 모두 고르시오.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}}$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)$

① ㄱ, ㄴ

② ㄱ, ㄷ

③ ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 적분 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}} dx$ 의 값을 구하시오.

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ π

17. 평면 $x + 2y - 2z = 1$ 에서 거리(distance)가 2가 되는 평면의 방정식을 모두 구하시오.

- ① $x + 2y - 2z = -1$, $x + 2y - 2z = 3$
- ② $x + 2y - 2z = -2$, $x + 2y - 2z = 4$
- ③ $x + 2y - 2z = -3$, $x + 2y - 2z = 5$
- ④ $x + 2y - 2z = -4$, $x + 2y - 2z = 6$
- ⑤ $x + 2y - 2z = -5$, $x + 2y - 2z = 7$

19. 다음의 극한 중 수렴하는 것을 모두 고르시오.

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \tan^2 y}{x^2 + 3y^2} \\ \text{ㄴ. } & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3 + 2x^2y + x^3}{x^2 + y^2} \\ \text{ㄷ. } & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^3 + 2y^4} \\ \text{ㄹ. } & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

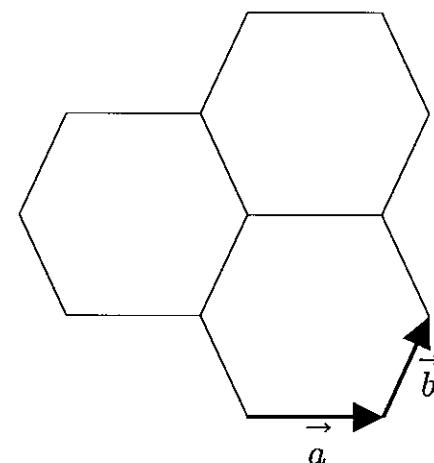
① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

18. 다음 명제들 중 옳은 것을 모두 고르시오.

- ㄱ. 두 개의 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모두 발산하는 경우, $\{a_n + b_n\}$ 도 발산한다
- ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하는 경우, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 도 수렴한다.
- ㄷ. 역급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 은 모든 x 에 대하여 수렴한다.
- ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 다음과 같이 전개 된다고 가정하자:
- $$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$
- 이때, $f^{(4)}(0) = 1$ 이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄹ ③ ㄷ, ㄹ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄹ

20. 아래 그림처럼 정육각형 3개가 서로 연결되어 있다. 이때 세 개의 정육면체 면적의 합을 벡터 \vec{a}, \vec{b} 로 나타내시오.



① $12|\vec{a} \times \vec{b}|$ ② $9|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ ③ $6|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ ④ $12|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ ⑤ $9|\vec{a} \times \vec{b}|$

※ 21번부터 30번까지의 문제는 다음의 보기에서 답을 고르시오.

[보기]

- | | | | | |
|-------------------|---|---|---|-------------------|
| ① $\frac{1}{2}$ | ② $\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$ | ③ $\frac{5}{2}$ | ④ 0 | ⑤ 1 |
| ⑥ 2 | ⑦ 3 | ⑧ $-\sqrt{3}$ | ⑨ $\sqrt{2}$ | ⑩ $\sqrt{3}$ |
| ⑪ 24 | ⑫ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | ⑬ $\begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$ | ⑭ 7^{12} | ⑮ $\frac{\pi}{3}$ |
| ⑯ $\frac{\pi}{2}$ | ⑰ 5 | ⑱ $\frac{16}{5}$ | ⑲ $\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$ | ⑳ $\frac{\pi}{6}$ |

21. 일곱 가지의 다른 색깔을 가진 공들 중에서 12개의 공을 선택하여 상자에 담고자 한다. 모든 가능한 경우의 수를 구하시오.

22. 세 개의 수 $3k, 2k^2+1, 7k-1$ 가 주어진 순서로 등차수열을 이룰 때, 모든 k 값들의 합을 구하시오.

23. 벡터함수 $r_1(t) = \langle \cos t, \ln(1+t), \sin t \rangle$, $r_2(t) = \langle 1+t, te^t, t^3 \rangle$ 로 표 현되는 두 개의 곡선이 점 $(1,0,0)$ 에서 서로 교차할 때, 두 개의 곡선이 이루는 예각을 계산하시오.

24. $f(x) = \int_{x-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^x \sin(t^2) dt$ 라고 정의할 때, $f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ 를 구하시오.

25. 함수 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$, $y=0, x=-1, x=1$ 에 의해 둘러싸인 영역을 직선 $x=2$ 를 축으로 회전하여 생기는 영역의 부피를 구하시오.

24. 실수 t 에 대하여 다음 행렬의 행렬식(determinant)의 값을 구하시오.

$$\begin{pmatrix} 2\sin 3t & 0 & 2\cos 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos 3t & 0 & \sin 3t \end{pmatrix}$$

27. 벡터 함수 $r(t)$ 에 의해 결정되는 곡선 C 가 있다. 모든 t 에 대해 벡터 $r(t)$ 는 항상 일정한 크기를 가지고 있다. C 위에 있는 임의의 점에서의 접선 벡터와 벡터 $r(t)$ 가 이루는 각을 θ 라고 할 때, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 의 값을 구하시오.

28. 정오에 영희는 철수로부터 남쪽으로 3km 떨어져 있었다. 영희는 동쪽으로 시속 1km의 속도로 걷고 있으며, 철수는 서쪽으로 3km의 속도로 걷고 있다. 오후 1시에 영희와 철수사이의 거리의 시간에 대한 변화율을 구하시오.

29. R 은 1사분면에서 $x + 2y = 2, x - 2y = 0, x = 0$ 에 의해 둘러싸인 영역이고 C 는 R 의 경계이다. 이때, 선적분 $\int_C \frac{1}{2}y^2 dx + (1 + 3xy)dy$ 의 값을 구하시오.

30. 삼중 적분 $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$ 의 값을 구하시오.